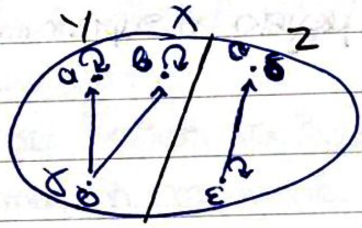
15/11/2018

(δ) $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$

και $\leq \; = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\delta,\delta), (\varepsilon,\varepsilon), (\gamma,\alpha), (\gamma,\beta), (\varepsilon,\delta)\}$

η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι μερική διάταξη σε X

Έστω $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $Z = \{\delta, \varepsilon\}$



→ $\min Y = \gamma$ (άρα και $\inf Y = \gamma$)

→ $\min Z = \varepsilon$ (άρα και $\inf Z = \varepsilon$)

και $\max Z = \delta$ (άρα και $\sup Z = \delta$)

→ Το Y δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Τα α, β είναι ψευδομέγιστα (maximal) του Y.

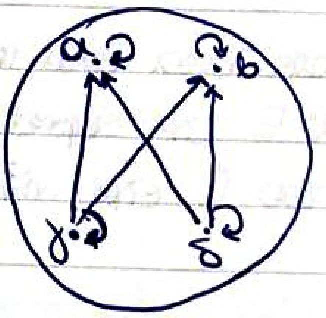
→ Το X δεν έχει ελάχιστο στοιχείο ούτε μέγιστο στοιχείο.

→ Τα γ, ε είναι ψευδοελάχιστα του Y.

→ Τα α, β, δ είναι ψευδομέγιστα του X.

Αν $A=\{α,β\}$. Το A δεν έχει μέγιστο, ούτε ελάχιστο στοιχείο.
Το A δεν είναι άνω φραγμένο.
Το A είναι κάτω φραγμένο, ειδικότερα το $γ$ είναι το μοναδικό κάτω φράγμα του A.
Άρα $\inf A = γ$.

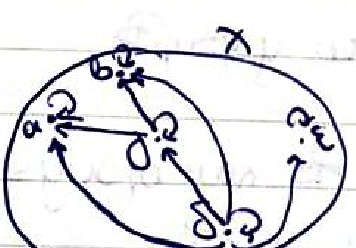
(ε) $X=\{α,β,γ,δ\}$



$\leq = \{(α,α),(β,β),(γ,γ),(δ,δ),(γ,α),(γ,β),(δ,α),(δ,β)\}$, μερική διάταξη
Θέτουμε $Y=\{γ,δ\}$. $Z=\{α,β\}$
Το Y δεν είναι κάτω φραγμένο.
Το Y είναι άνω φραγμένο. και τα άνω φράγματα του Y είναι ακριβώς τα $α,β$.
Το Y δεν έχει supremum.

Το Z δεν είναι άνω φραγμένο.
Το Z είναι κάτω φραγμένο και τα κάτω φράγματα του είναι ακριβώς τα $γ,δ$.
Το Z δεν έχει infimum (διότι το σύνολο $\{γ,δ\}$ δεν έχει μέγιστο)

(στ)



$\leq \{(α,α),(β,β),(γ,γ),(δ,δ),(ε,ε),(γ,α),(γ,β),(δ,α),(δ,β),(δ,γ),(δ,ε)\}$
Η $\leq$ είναι μερική διάταξη.
Θέτουμε $Y=\{α,β\}$

→ $\min X = δ$
→ Το X δεν έχει μέγιστο στοιχείο
→ Τα $α,β,ε$ είναι ψευδομέγιστα του X

→ Το $Y=\{\alpha,\beta\}$ είναι κάτω φραγμένο και τα μοναδικά κάτω φράγματα του είναι τα γ, δ. Και εφόσον $\delta \leq \gamma$ το γ είναι το infimum του Y. $\inf Y=\gamma$.

Για το σύνολο $Y^c=\{\gamma,\delta,\varepsilon\}$
→ Το Y^c έχει ελάχιστο το δ.
→ Το Y^c δεν είναι άνω φραγμένο

Πρόταση: Έστω $(E,\leq)$ διατεταγμένο σύνολο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(i) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του E έχει supremum.
(ii) Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του E έχει infimum

Απόδειξη.
(i) ⇒ (ii) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (i)
Έστω A ένα μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του E
(και θα δ.ο. το A έχει infimum)
Έστω B το σύνολο όλων των κάτω φραγμάτων του A.
Τότε $B\neq\emptyset$ (Εφόσον το A είναι κάτω φραγμένο)
Το B είναι άνω φραγμένο. (Πράγματι, κάθε στοιχείο του A είναι άνω φράγμα του B).
Από την υπόθεση (i) το B έχει supremum. Έστω $y=\sup B$.
→ Το y είναι κάτω φράγμα του A.
Πράγματι, $\forall x\in A$, το x είναι άνω φράγμα του B και άρα $y\leq x$ διότι το y είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B.
→ Επίσης αν γ τυχαίο κάτω φράγμα του A τότε $\gamma\in B$
άρα $\gamma\leq \sup B=y$. Επομένως, $y=\inf A$
(ii) → (i) Ομοίως

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα διατεταγμένο σύνολο $(E, \leq)$ λέγεται κεκορεσμένο αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει supremum.

ΑΣΚΗΣΗ:
Στο σύνολο $E = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$. Ορίζουμε τη σχέση $\leq$ ως εξής: $x \leq y \iff [3x \leq y$ ή $x = y]$.

(α) Ν.δ.ο. η $\leq$ είναι σχέση διάταξης στο E, όχι γραμμική.

(β) Να εξετάσετε αν το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ είναι άνω ή κάτω φραγμένο και να βρεθούν (αν υπάρχουν), μέγιστο, ελάχιστο, supremum, infimum, ψευδομέγιστο (maximal), ψευδοελάχιστο (minimal) (ως προς την $\leq$)

ΛΥΣΗ:

- $\leq$ αυτοπαθής: (εξ ορισμού)

$\leq$ αντισυμμετρική: Έστω $x, y \in E$ ώστε $x \leq y$ και $y \leq x$
θ.δ.ο. $x = y$

Αν $x \neq y$ τότε $x \leq y$ και $3y \leq x$

άρα $\begin{cases} 9x \leq 3y \\ 3y \leq x \end{cases} \Rightarrow 9x \leq x \Rightarrow 8x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$ άτοπο

Άρα $x = y$

$\leq$ μεταβατική: Έστω $x, y, z \in E$ ώστε $x \leq y$ και $y \leq z$
(και θ.δ.ο. $x \leq z$)

Αν $x = y$ τότε, εφόσον $y \leq z$, προκύπτει $x \leq z$

Αν $y = z$ τότε, εφόσον $x \leq y$, προκύπτει $x \leq z$

Αν $x \neq y$ και $y \neq z$ τότε $3x \leq y$ και $3y \leq z$.

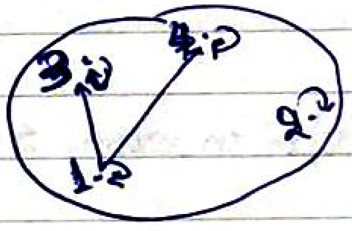
Εφόσον $y > 0$ έχουμε $y \leq 3y$ άρα $3x \leq y \leq 3y \leq z$ συνεπώς $x \leq z$.

Επομένως, η $\leq$ είναι σχέση διάταξης.

Εφόσον δεν ισχύει $1 \leq 2$ ούτε $2 \leq 1$ η $\leq$ δεν είναι γραμμική.

Εξετάζουμε τον περιορισμό της ≤ στο Α

$\leq_A = \leq \cap (A \times A) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(1,4)\}$



Το Α δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο
Τα 2,3,4 είναι ψευδομέγιστα του Α
Τα 1,2 είναι ψευδοελάχιστα του Α

Βρίσκουμε τα άνω φράγματα του Α

$\{x \in E : 1 \leq x,\ 2 \leq x,\ 3 \leq x,\ 4 \leq x\}$

$x \leq y \Leftrightarrow [3x \leq y \text{ ή } x = y]$

$$\begin{cases} 1 \leq x \\ 2 \leq x \\ 3 \leq x \\ 4 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \text{ ή } x = 1 \\ 6 \leq x \text{ ή } x = 2 \\ 9 \leq x \text{ ή } x = 3 \\ 12 \leq x \text{ ή } x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 12 \leq x$$

Άρα το σύνολο των άνω φραγμάτων του Α είναι το $\{x \in E : 12 \leq x\} = [12, +\infty)$

Εξετάζουμε αν το σύνολο αυτό έχει ελάχιστο ως προς την ≤ (Προσοχή όχι ως προς την ≤).

Αν $a \in [12, +\infty)$ ώστε $a \leq x$ $\forall x \in [12, +\infty)$ τότε

$$\left.\begin{matrix} a \leq 12 \\ a \leq 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3a \leq 12 \text{ ή } a = 12 \\ 3a \leq 15 \text{ ή } a = 15 \end{matrix}\right\} a \leq 4 \text{ άτοπο διότι } a \in [12, +\infty)$$

Άρα το $[12, +\infty)$ δεν έχει ελάχιστο ως προς την ≤ επομένως το Α δεν έχει supremum

→ Ομοίως μπορούμε να δούμε ότι το σύνολο των κάτω φραγμάτων του Α ως προς την ≤ είναι το $(0, 1/3]$ το οποίο μπορεί να δειχτεί ότι δεν έχει μέγιστο ως προς την ≤. Επομένως δεν έχει infimum.